Fondements logiques du droit de savoir
Logical foundations of the right to know

Philippe Balbiani et Olivier Gasquet
Institut de recherche en informatique de Toulouse

Résumé

Afin de pallier les conséquences des insuffisances des modèles formels basés sur la logique modale pour exprimer une politique de sécurité capable de parler du droit de connaître, nous reconsidérons la question des fondements logiques du droit de savoir. Nous construisons la syntaxe d'un langage dans lequel l'écriture de formules disant que "il est obligatoire que ..." et "il est su par l'agent i que ..." est possible. Nous décrivons quelques-unes des propriétés des théories logiques qui correspondent à ce langage.

Abstract

In order to palliate the consequences of the inadequacies of the formal models based on modal logic for expressing a security policy able to talk about the right to know, we reconsider the question of the logical foundations of the right to know. We build the syntax of a language in which the writing of formulas saying that "it is obligatory that ..." and "it is known by agent i that ..." is possible. We describe some of the properties of the logical theories that correspond to this language.

Mots-clés

Politique de sécurité, logique déontique, logique épistémique.

Keywords

Security policy, deontic logic, epistemic logic.

1 Introduction

Une politique de sécurité doit dire dans quelles données les utilisateurs ont le droit de lire ou d'écrire. Lorsqu'un utilisateur demande la permission d'accéder en lecture ou en écriture à une donnée entreposée dans une base, le système de gestion de la base consulte sa politique de sécurité et évalue les droits que l'utilisateur a sur la donnée. Parmi les modèles d'expression de politiques de sécurité, les plus fameux sont certainement le modèle de Bell et LaPadula et le modèle de Biba. Dans le modèle de Bell et LaPadula, il est d'abord question d'assurer la confidentialité des données. Par suite, un utilisateur i peut accéder en lecture à une donnée p lorsque le niveau de confidentialité de i est supérieur ou égal au niveau de confidentialité de p. Dans le modèle de Biba, il est d'abord question d'assurer l'intégrité des données. Par suite, un utilisateur i peut accéder en écriture à une donnée p lorsque le niveau d'intégrité de i est supérieur ou égal au niveau d'intégrité de p. Dans cet article, nous nous intéressons exclusivement au droit de lire. La faiblesse principale du modèle de Bell et LaPadula, du modèle de Biba et de leurs avatars [3] est de ne pas distinguer le droit de lire dans une donnée du droit d'en connaître la valeur. En effet, le droit de lire dans une donnée implique le droit d'en connaître la valeur mais ne lui est pas équivalent. Or, au-delà du droit de lire dans les données, c'est bien du droit d'en connaître les valeurs dont une politique de sécurité doit être capable de parler.

Pour exprimer une politique de sécurité capable de parler du droit de connaître, Bieber et Cuppens [2] et Glasgow, MacEwen et Panangaden [15] considèrent un langage modal contenant les opérateurs $\Box_i$ ("il est su par l'agent i que ...") et $\mathcal{P}\Box_i$ ("il est permis d'être su par l'agent i que ..."). Une conséquence de l'interprétation sémantique par Bieber et Cuppens des opérateurs $\Box_i$ et $\mathcal{P}\Box_i$ est la validité de la formule $\mathcal{P}\Box_i p \rightarrow \Box_i p$ ("tout ce qui est permis d'être su que par l'agent i, l'agent i le sait"). Or, il est des propositions ("la température au col de Montgenèvre est supérieure à 0 °C") dont il est permis que l'agent i sache qu'elles sont vraies mais dont l'agent i ne sait rien. Une conséquence de l'interprétation sémantique par Glasgow, MacEwen et Panangaden des opérateurs $\Box_i$ et $\mathcal{P}\Box_i$ est la validité de la formule $\mathcal{P}\Box_i p \rightarrow p$ ("tout ce qui est permis d'être su que par l'agent i est vrai"). Or, il est des propositions ("il est su par l'agent i que la température au col de Montgenèvre est supérieure à 0 °C") dont il est permis que l'agent i sache qu'elles sont vraies mais qui sont fausses. D'autres modèles formels basés sur la logique modale ont également été proposés par Cuppens et Demolombe [9,10] qui s'intéressent aussi aux opérateurs $\Box_i$ et $\mathcal{P}\Box_i$. Une conséquence de la syntaxe des langages construits par Cuppens et Demolombe est l'impossibilité d'écrire une formule disant que "tout ce qui est permis d'être su par l'agent i que, l'agent i sait que cela l'est". Or, il est des cas où l'écriture d'une telle formule est nécessaire.

Afin de pallier les conséquences des insuffisances des modèles formels évoqués ci-dessus, nous reconsidérons la question des fondements logiques du droit de savoir. Pour ce faire, nous construisons dans la section 2.1 la syntaxe d'un langage dans lequel l'écriture de formules disant que “il est obligatoire que $\ldots$” et “il est su par l’agent i que $\ldots$” est possible. Ce langage intègre donc des opérateurs déontiques ($\mathcal{O}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{F}$) grâce auxquels le caractère obligatoire, interdit, permis ou facultatif des énoncés est exprimable et des opérateurs épistémiques ($\Box_i$ et $\Diamond_i$) grâce auxquels le caractère su par l’agent i ou admis par l’agent i des énoncés est exprimable. Les formules de notre langage permettent l’expression de principes forts comme, par exemple, $\mathcal{P}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{P}\Box_i p$ qui dit que “tout ce qui est permis d’être su par l’agent i que, l’agent i sait que cela l’est”. Les objets syntaxiques de notre langage, nous les interprétons sémantiquement dans la section 2.2 par le moyen de structures relationnelles appelées cadres. Nous montrons dans les sections 3 et 4 quelques-unes des correspondances qu’on peut établir entre certaines formules de notre langage et certaines sentences closes de la logique classique du 1er ordre. Cette correspondance, nous en poursuivons l’étude dans les sections 5 et 6 à propos du droit de savoir que et du droit de savoir si. Finalement, nous étudions dans la section 7 quelques-unes des propriétés des théories logiques auxquelles les principes évoqués ci-dessus donnent lieu.

2 Syntaxe et sémantique

2.1 Syntaxe

Nous construisons la syntaxe de notre langage à partir d’un ensemble non vide AG d’agents et d’un ensemble dénombrable AT d’atomes. L’ensemble des formules est obtenu à partir de AG et AT en itérant un nombre indéfini de fois les opérations suivantes :

- pour tout $p \in AT$, p est une formule,
- $\perp$ (“falsum”) est une formule,
- si ϕ est une formule alors $\neg\phi$ (“non ϕ”) est une formule,
- si ϕ est une formule et ψ est une formule alors $(\phi \vee \psi)$ (“ϕ ou ψ”) est une formule,
- si ϕ est une formule alors $\mathcal{O}\phi$ (“il est obligatoire que ϕ”) est une formule et
- si ϕ est une formule alors pour tout $i \in AG$, $\Box_i\phi$ (“il est su par l’agent i que ϕ”) est une formule.

Nous utilisons les abréviations habituelles pour simplifier les écritures. En particulier,

- $\mathcal{I}\phi$ (“il est interdit que ϕ”) remplace $\mathcal{O}\neg\phi$,
- $\mathcal{P}\phi$ (“il est permis que ϕ”) remplace $\neg\mathcal{O}\neg\phi$,
- $\mathcal{F}\phi$ (“il est facultatif que ϕ”) remplace $\neg\mathcal{O}\phi$ et
- $\Diamond_i\phi$ (“il est admis par l’agent i que ϕ”) remplace $\neg\Box_i\neg\phi$.

La longueur d’une formule ϕ, notation $\mid \phi \mid$, est le nombre d’occurrences de symboles dans ϕ. Pour tout ensemble x de formules, $\mathcal{O}x$ dénote l’ensemble des formules ϕ telles que $\mathcal{O}\phi \in x$ et $\Box_i x$ dénote l’ensemble des formules ϕ telles que $\Box_i\phi \in x$.

2.2 Sémantique

Il s’agit maintenant d’interpréter sémantiquement les objets syntaxiques que nous avons introduits. Un cadre est une structure relationnelle de la forme $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans lequel W est un ensemble non vide de mondes possibles, R est une relation binaire sur W et S est une fonction associant à chaque agent $i \in AG$ une relation binaire S_i sur W. Une valuation sur $\mathcal{F}$ est une fonction V associant à chaque monde possible $x \in W$ un ensemble $V(x)$ d’atomes. Relativement à un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ et à une valuation V sur $\mathcal{F}$, nous définissons la relation de satisfiabilité entre un monde possible $x \in W$ et une formule ϕ, notation $(\mathcal{F}, V, x) \models \phi$, de la façon suivante :

- $(\mathcal{F}, V, x) \models p$ si et seulement si $p \in V(x)$,
- $(\mathcal{F}, V, x) \not\models \perp$,
- $(\mathcal{F}, V, x) \models \neg\phi$ si et seulement si non $(\mathcal{F}, V, x) \models \phi$,
- $(\mathcal{F}, V, x) \models \phi \vee \psi$ si et seulement si $(\mathcal{F}, V, x) \models \phi$ ou $(\mathcal{F}, V, x) \models \psi$,
- $(\mathcal{F}, V, x) \models \mathcal{O}\phi$ si et seulement si pour tout $y \in W$, xRy seulement si $(\mathcal{F}, V, y) \models \phi$ et
- $(\mathcal{F}, V, x) \models \Box_i\phi$ si et seulement si pour tout $y \in W$, xS_iy seulement si $(\mathcal{F}, V, y) \models \phi$.

Une formule ϕ est valide dans un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, notation $\mathcal{F} \models \phi$, lorsque pour toute valuation V sur $\mathcal{F}$ et pour tout $x \in W$, $(\mathcal{F}, V, x) \models \phi$. Une formule ϕ est satisfaite dans un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, notation $\mathcal{F}\ sat\ \phi$, lorsqu’il existe une valuation V sur $\mathcal{F}$ et il existe $x \in W$ tel que $(\mathcal{F}, V, x) \models \phi$.

3 Droit et savoir

3.1 Droit

L’intuition que nous avons des énoncés “il est obligatoire que ϕ”, “il est interdit que ϕ”, “il est permis que ϕ” et “il est facultatif que ϕ” est telle que nous nous intéressons aux cadres validant les formules suivantes :

(D_1) $\mathcal{O}p \rightarrow \mathcal{P}p$ (“tout ce qui est obligatoire est permis”) et

(D_2) $\mathcal{I}p \rightarrow \mathcal{F}p$ (“tout ce qui est interdit est facultatif”).

D’après [4], on sait que

- pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, $\mathcal{F} \models (D_1)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x\exists y(xRy)$ et
- pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, $\mathcal{F} \models (D_2)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x\exists y(xRy)$.

Par conséquent, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, $\mathcal{F} \models (D_1)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (D_2)$.

3.2 Savoir

L'intuition que nous avons des énoncés "il est su par l'agent i que ϕ" et "il est admis par l'agent i que ϕ" est telle nous nous intéressons aux cadres validant les formules suivantes :

(T_i) $\Box_i p \rightarrow p$ ("tout ce qui est su par l'agent i que est vrai"),

(4_i) $\Box_i p \rightarrow \Box_i \Box_i p$ ("tout ce qui est su par l'agent i que, l'agent i sait qu'il le sait") et

(5_i) $\Diamond_i p \rightarrow \Box_i \Diamond_i p$ ("tout ce qui est admis par l'agent i que, l'agent i sait qu'il l'admet").

D'après [4], on sait que

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, $\mathcal{F} \models (T_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x (x S_i x)$,

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, $\mathcal{F} \models (4_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (x S_i y \& y S_i z \Rightarrow x S_i z)$ et

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$, $\mathcal{F} \models (5_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (x S_i y \& x S_i z \Rightarrow y S_i z)$.

3.3 Classes de cadres

Soit $\mathcal{C}(D, T)$ la classe des cadres validant les formules (D_1), (D_2) et pour tout $i \in AG$, (T_i), $\mathcal{C}(D, T, 4)$ la classe des cadres validant les formules (D_1), (D_2) et pour tout $i \in AG$, (T_i) et (4_i) et $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$ la classe des cadres validant les formules (D_1), (D_2) et pour tout $i \in AG$, (T_i), (4_i) et (5_i). Dans $\mathcal{C}(D, T)$, nous disons que les agents sont réalistes, dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$, nous disons que les agents sont faiblement introspectifs et dans $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, nous disons que les agents sont fortement introspectifs.

4 A propos du droit que

4.1 Le droit que

Parmi les principes évoqués dans la section 3, nous considérons dorénavant qu'au moins les principes suivants sont respectés : "tout ce qui est obligatoire est permis", "tout ce qui est interdit est facultatif" et "tout ce qui est su par l'agent i que est vrai". Autrement dit, c'est à des agents réalistes que nous nous intéressons désormais. Il y a plusieurs façons d'interpréter l'adage "nul n'est censé ignorer la loi" dans la syntaxe de notre langage. Dans un premier temps, nous lui faisons correspondre les formules suivantes qui caractérisent le droit que :

(O_i) $\mathcal{O}p \rightarrow \Box_i \mathcal{O}p$ ("tout ce qui est obligatoire, l'agent i sait que cela l'est"),

(I_i) $\mathcal{I}p \rightarrow \Box_i \mathcal{I}p$ ("tout ce qui est interdit, l'agent i sait que cela l'est"),

(P_i) $\mathcal{P}p \rightarrow \Box_i \mathcal{P}p$ ("tout ce qui est permis, l'agent i sait que cela l'est") et

(F_i) $\mathcal{F}p \rightarrow \Box_i \mathcal{F}p$ ("tout ce qui est facultatif, l'agent i sait que cela l'est").

Examinons dans quelle mesure les formules ci-dessus caractérisent différentes interprétations de l'adage "nul n'est censé ignorer la loi".

4.2 Agents réalistes ou faiblement introspectifs

D'après [4], on sait que

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (O_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (x S_i y \& y R z \Rightarrow x R z)$,

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (I_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (x S_i y \& y R z \Rightarrow x R z)$,

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (P_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (x S_i y \& x R z \Rightarrow y R z)$ et

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (F_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (x S_i y \& x R z \Rightarrow y R z)$.

Par conséquent, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (O_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (I_i)$ et pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (P_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (F_i)$. C'est-à-dire :

– un agent réaliste sait ce qui est obligatoire si et seulement si il sait ce qui est interdit et

– un agent réaliste sait ce qui est permis si et seulement si il sait ce qui est facultatif.

Par ailleurs, il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \models (O_i)$, $\mathcal{F} \models (I_i)$, $\mathcal{F} \not\models (P_i)$ et $\mathcal{F} \not\models (F_i)$ et il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O_i)$, $\mathcal{F} \not\models (I_i)$, $\mathcal{F} \models (P_i)$ et $\mathcal{F} \models (F_i)$. C'est-à-dire :

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est obligatoire et ce qui est interdit sans savoir ce qui est permis et ce qui est facultatif et

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est permis et ce qui est facultatif sans savoir ce qui est obligatoire et ce qui est interdit.

En effet, par exemple, le cadre présenté dans la figure 1 valide (O_i) et (I_i) mais ne valide ni (P_i) ni (F_i).

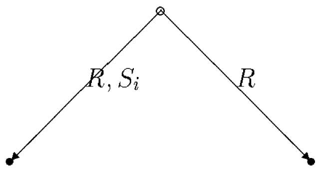

Figure 1.

Dans la figure 1 ainsi que dans les figures 2–6, le monde possible $\circ$ est relié à lui-même par la relation binaire S_i et les mondes possibles $\bullet$ sont reliés à eux-mêmes par les relations binaires R et S_i.

4.3 Agents fortement introspectifs

Toutefois, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, $\mathcal{F} \models (O_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (I_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (P_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (F_i)$. C'est-à-dire :

– un agent fortement introspectif sait ce qui est obligatoire si et seulement si il sait ce qui est interdit si et seulement si il sait ce qui est permis si et seulement si il sait ce qui est facultatif.

5 A propos du droit de savoir que

5.1 Le droit de savoir que

Les formules (O_i), (I_i), (P_i) et (F_i) nous disent que "tout ce qui est obligatoire, interdit, permis ou facultatif, l'agent i sait que cela l'est". Il est des cas où des formules disant que "tout ce qui est obligatoire, interdit, permis ou facultatif d'être su par l'agent i que, l'agent i sait que cela l'est" sont plus appropriées. Pour cette raison, nous nous intéressons également aux formules suivantes qui caractérisent le droit de savoir que :

$(O\Box_i)$ $\mathcal{O}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{O}\Box_i p$ ("tout ce qui est obligatoire d'être su par l'agent i que, l'agent i sait que cela l'est"),

$(I\Box_i)$ $\mathcal{I}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{I}\Box_i p$ ("tout ce qui est interdit d'être su par l'agent i que, l'agent i sait que cela l'est"),

$(P\Box_i)$ $\mathcal{P}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{P}\Box_i p$ ("tout ce qui est permis d'être su par l'agent i que, l'agent i sait que cela l'est") et

$(F\Box_i)$ $\mathcal{F}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{F}\Box_i p$ ("tout ce qui est facultatif d'être su par l'agent i que, l'agent i sait que cela l'est").

Il est intéressant de noter que pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (O_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (O\Box_i)$, $\mathcal{F} \models (I_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (I\Box_i)$, $\mathcal{F} \models (P_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (P\Box_i)$ et $\mathcal{F} \models (F_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (F\Box_i)$. Examinons dans quelle mesure les formules ci-dessus caractérisent différentes interprétations de l'adage "nul n'est censé ignorer la loi".

5.2 Agents réalistes ou faiblement introspectifs

D'après [4], on sait que

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (O\Box_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \forall t \exists u (x S_i y \& y R z \& z S_i t \Rightarrow x R u \& u S_i t)$,

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (I\Box_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \exists u \forall t (x S_i y \& y R z \& u S_i t \Rightarrow x R u \& z S_i t)$,

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (P\Box_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \exists u \forall t (x S_i y \& x R z \& u S_i t \Rightarrow y R u \& z S_i t)$ et

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T)$, $\mathcal{F} \models (F\Box_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \forall t \exists u (x S_i y \& x R z \& z S_i t \Rightarrow y R u \& u S_i t)$.

Il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \models (O\Box_i)$, $\mathcal{F} \not\models (I\Box_i)$, $\mathcal{F} \not\models (P\Box_i)$ et $\mathcal{F} \not\models (F\Box_i)$, il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O\Box_i)$, $\mathcal{F} \models (I\Box_i)$, $\mathcal{F} \not\models (P\Box_i)$ et $\mathcal{F} \not\models (F\Box_i,$ il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O\Box_i)$, $\mathcal{F} \not\models (I\Box_i)$, $\mathcal{F} \models (P\Box_i)$ et $\mathcal{F} \not\models (F\Box_i)$ et il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O\Box_i)$, $\mathcal{F} \not\models (I\Box_i)$, $\mathcal{F} \not\models (P\Box_i)$ et $\mathcal{F} \models (F\Box_i)$.

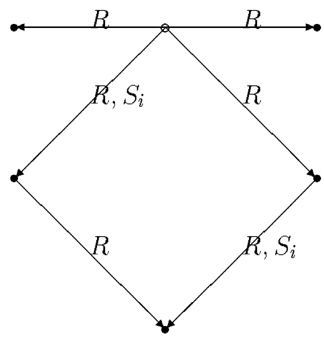

Figure 2.

C'est-à-dire :

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est obligatoire d'être su que sans savoir ce qui est interdit d'être su que, ce qui est permis d'être su que et ce qui est facultatif d'être su que,

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est interdit d'être su que sans savoir ce qui est obligatoire d'être su que, ce qui est permis d'être su que et ce qui est facultatif d'être su que,

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est permis d'être su que sans savoir ce qui est obligatoire d'être su que, ce qui est interdit d'être su que et ce qui est facultatif d'être su que et

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est facultatif d’être su que sans savoir ce qui est obligatoire d’être su que, ce qui est interdit d’être su que et ce qui est permis d’être su que.

En effet, par exemple, le cadre présenté dans la figure 2 valide $(O\Box_i)$ mais ne valide ni $(I\Box_i)$ ni $(P\Box_i)$ ni $(F\Box_i)$ et le cadre présenté dans la figure 3 valide $(I\Box_i)$ mais ne valide ni $(O\Box_i)$ ni $(P\Box_i)$ ni $(F\Box_i)$.

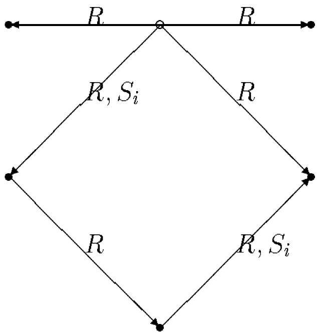

Figure 3.

5.3 Agents fortement introspectifs

Par ailleurs, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, $\mathcal{F} \models (O\Box_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (I\Box_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (P\Box_i)$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (F\Box_i)$. C’est-à-dire :

– un agent fortement introspectif sait ce qui est obligatoire d’être su que si et seulement si il sait ce qui est interdit d’être su que si et seulement si il sait ce qui est permis d’être su que si et seulement si il sait ce qui est facultatif d’être su que.

6 A propos du droit de savoir si

6.1 Le droit de savoir si

Les formules $(O\Box_i)$, $(I\Box_i)$, $(P\Box_i)$ et $(F\Box_i)$ nous disent que “tout ce qui est obligatoire, interdit, permis ou facultatif d’être su par l’agent i que, l’agent i sait que cela l’est”. Il est des cas où des formules disant que “tout ce qui est obligatoire, interdit, permis ou facultatif d’être su par l’agent i si, l’agent i sait que cela l’est” sont plus appropriées. Pour cette raison, nous nous intéressons enfin aux formules suivantes qui caractérisent le droit de savoir si :

$(O(\Box_i\Box_i\neg))$ $\mathcal{O}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{O}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ (“tout ce qui est obligatoire d’être su par l’agent i si, l’agent i sait que cela l’est”),

$(I(\Box_i\Box_i\neg))$ $\mathcal{I}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{I}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ (“tout ce qui est interdit d’être su par l’agent i si, l’agent i sait que cela l’est”),

$(P(\Box_i\Box_i\neg))$ $\mathcal{P}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{P}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ (“tout ce qui est permis d’être su par l’agent i si, l’agent i sait que cela l’est”) et

$(F(\Box_i\Box_i\neg))$ $\mathcal{F}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{F}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ (“tout ce qui est facultatif d’être su par l’agent i si, l’agent i sait que cela l’est”).

Il est intéressant de noter que pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$, $\mathcal{F} \models (O\Box_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (O(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \models (I\Box_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (I(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \models (P\Box_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ et $\mathcal{F} \models (F\Box_i)$ seulement si $\mathcal{F} \models (F(\Box_i\Box_i\neg))$. Examinons dans quelle mesure les formules ci-dessus caractérisent différentes interprétations de l’adage “nul n’est censé ignorer la loi”.

6.2 Agents réalistes ou faiblement introspectifs

Regardons d’abord ce qui se passe dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$. On ignore si

– il existe une sentence close α telle que pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$, $\mathcal{F} \models (O(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \alpha$,

– il existe une sentence close α telle que pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$, $\mathcal{F} \models (I(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \alpha$,

– il existe une sentence close α telle que pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$, $\mathcal{F} \models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \alpha$ et

– il existe une sentence close α telle que pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$, $\mathcal{F} \models (F(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \alpha$.

Il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \models (O(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (I(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ et $\mathcal{F} \not\models (F(\Box_i\Box_i\neg))$, il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \models (I(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ et $\mathcal{F} \not\models (F(\Box_i\Box_i\neg))$, il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (I(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ et $\mathcal{F} \not\models (F(\Box_i\Box_i\neg))$ et il existe un cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ dans $\mathcal{C}(D, T, 4)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (I(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ et $\mathcal{F} \models (F(\Box_i\Box_i\neg))$.

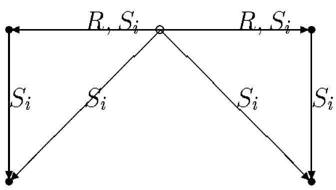

Figure 4.

C’est-à-dire :

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est obligatoire d’être su si sans savoir ce qui est interdit d’être su si, ce qui est permis d’être su si et ce qui est facultatif d’être su si,

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est interdit d'être su si sans savoir ce qui est obligatoire d'être su si, ce qui est permis d'être su si et ce qui est facultatif d'être su si,

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est permis d'être su si sans savoir ce qui est obligatoire d'être su si, ce qui est interdit d'être su si et ce qui est facultatif d'être su si et

– il existe des cas où des agents faiblement introspectifs savent ce qui est facultatif d'être su si sans savoir ce qui est obligatoire d'être su si, ce qui est interdit d'être su si et ce qui est permis d'être su si.

En effet, par exemple, le cadre présenté dans la figure 4 valide $(O(\Box_i\Box_i\neg))$ mais ne valide ni $(I(\Box_i\Box_i\neg))$ ni $(P(\Box_i\Box_i\neg))$ ni $(F(\Box_i\Box_i\neg))$ et le cadre présenté dans la figure 5 valide $(I(\Box_i\Box_i\neg))$ mais ne valide ni $(O(\Box_i\Box_i\neg))$ ni $(P(\Box_i\Box_i\neg))$ ni $(F(\Box_i\Box_i\neg))$.

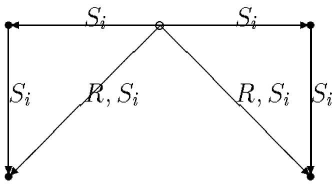

Figure 5.

6.3 Agents fortement introspectifs

Regardons ensuite ce qui se passe dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$. D'après [4], on sait que

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$, $\mathcal{F} \models (O(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x\forall y\forall z\exists t(xS_iy\&yRz \Rightarrow xRt\&(Card(S_i(z)) \geq 2 \Rightarrow tS_iz))$,

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$, $\mathcal{F} \models (I(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x\forall y\forall z\exists t(xS_iy\&yRz \Rightarrow xRt\&(Card(S_i(t)) \geq 2 \Rightarrow zS_it))$,

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$, $\mathcal{F} \models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x\forall y\forall z\exists t(xS_iy\&xRz \Rightarrow yRt\&(Card(S_i(t)) \geq 2 \Rightarrow zS_it))$ et

– pour tout cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$, $\mathcal{F} \models (F(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models \forall x\forall y\forall z\exists t(xS_iy\&xRz \Rightarrow yRt\&(Card(S_i(z)) \geq 2 \Rightarrow tS_iz))$.

Par conséquent, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$, $\mathcal{F} \models (O(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (F(\Box_i\Box_i\neg))$ et pour tout cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$, $\mathcal{F} \models (I(\Box_i\Box_i\neg))$ si et seulement si $\mathcal{F} \models (P(\Box_i\Box_i\neg))$. C'est-à-dire :

– un agent fortement introspectif sait ce qui est obligatoire d'être su si si et seulement si il sait ce qui est facultatif d'être su si et

– un agent fortement introspectif sait ce qui est interdit d'être su si si et seulement si il sait ce qui est permis d'être su si.

Par ailleurs, il existe un cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$ tel que $\mathcal{F} \models (O(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (I(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \not\models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ et $\mathcal{F} \models (F(\Box_i\Box_i\neg))$ et il existe un cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}(D,T,4,5)$ tel que $\mathcal{F} \not\models (O(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \models (I(\Box_i\Box_i\neg))$, $\mathcal{F} \models (P(\Box_i\Box_i\neg))$ et $\mathcal{F} \not\models (F(\Box_i\Box_i\neg))$. C'est-à-dire :

– il existe des cas où des agents fortement introspectifs savent ce qui est obligatoire d'être su si et ce qui est facultatif d'être su si sans savoir ce qui est interdit d'être su si et ce qui est permis d'être su si et

– il existe des cas où des agents fortement introspectifs savent ce qui est interdit d'être su si et ce qui est permis d'être su si sans savoir ce qui est obligatoire d'être su si et ce qui est facultatif d'être su si.

En effet, par exemple, le cadre présenté dans la figure 6 valide $(O(\Box_i\Box_i\neg))$ et $(F(\Box_i\Box_i\neg))$ mais ne valide ni $(I(\Box_i\Box_i\neg))$ ni $(P(\Box_i\Box_i\neg))$.

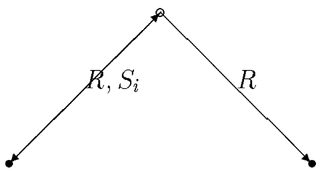

Figure 6.

7 Métalogique

Nous considérons que les principes évoqués dans la section 3 sont respectés : "tout ce qui est obligatoire est permis", "tout ce qui est interdit est facultatif", "tout ce qui est su par l'agent i que est vrai", "tout ce qui est su par l'agent i que, l'agent i sait qu'il le sait" et "tout ce qui est admis par l'agent i que, l'agent i sait qu'il l'admet". Autrement dit, c'est à des agents fortement introspectifs que nous nous intéressons désormais. A chaque ensemble Σ de formules nous associons la plus petite logique normale $\mathcal{L}(\Sigma)$ contenant Σ, (D_1), (D_2) et pour tout $i \in AG$, (T_i), (4_i) et (5_i). Une logique normale $\mathcal{L}(\Sigma)$ est correcte et complète pour une classe $\mathcal{C}$ de cadres lorsque pour toute formule ϕ, $\phi \in \mathcal{L}(\Sigma)$ si et seulement si pour tout cadre $\mathcal{F} = (W,R,S)$ dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{F} \models \phi$. Rappelons, d'après [4], que la logique normale $\mathcal{L}(\emptyset)$ est correcte et complète pour $\mathcal{C}(D,T,4,5)$. Une logique normale $\mathcal{L}(\Sigma)$

est PSPACE-complète (respectivement : coNEXPTIME-complète) lorsque le problème de l'appartenance des formules à $\mathcal{L}(\Sigma)$ est PSPACE-complet (respectivement : coNEXPTIME-complet). Rappelons, d'après [4], que la logique normale $\mathcal{L}(\emptyset)$ est PSPACE-complète et la logique normale $\mathcal{L}(\{\mathcal{O}\Box_i p \leftrightarrow \Box_i \mathcal{O}p\})$ est coNEXPTIME-complète. Nous nous intéressons aux logiques normales $\mathcal{L}(\{(O_i)\})$, $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ et $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$.

Proposition 1 *La logique normale $\mathcal{L}(\{(O_i)\})$ est correcte et complète pour la classe des cadres $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$ tels que $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (xS_i y \& yRz \Rightarrow xRz)$.*

Preuve Nous laissons au lecteur le soin de montrer la correction de $\mathcal{L}(\{(O_i)\})$ pour la classe des cadres $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$ tels que $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z (xS_i y \& yRz \Rightarrow xRz)$.
Quant à la complétude, l'argument habituel basé sur le modèle canonique de $\mathcal{L}(\{(O_i)\})$ permet de la montrer [4]. Dans cet argument, il faut montrer que si x, y et z sont des $\mathcal{L}(\{(O_i)\})$-théories maximales telles que $\Box_i x \subseteq y$ et $\mathcal{O}y \subseteq z$ alors $\mathcal{O}x \subseteq z$. Supposons $\Box_i x \subseteq y$ et $\mathcal{O}y \subseteq z$. Soit $\phi \in \mathcal{O}x$ une formule. Par conséquent, $\mathcal{O}\phi \in x$. Donc $\Box_i \mathcal{O}\phi \in x$. Puisque $\Box_i x \subseteq y$, alors $\mathcal{O}\phi \in y$. Puisque $\mathcal{O}y \subseteq z$, alors $\phi \in z$. Par conséquent, $\mathcal{O}x \subseteq z$. $\dashv$

Proposition 2 *La logique normale $\mathcal{L}(\{(O_i)\})$ est PSPACE-complète.*

Preuve La logique normale $\mathcal{L}(\{(O_i)\})$ est PSPACE-difficile parce qu'elle est une extension conservatrice de la restriction de la logique normale $\mathcal{L}(\emptyset)$ au langage défini par les opérateurs déontiques seulement.
Quant à l'appartenance à PSPACE, l'argument habituel basé sur les tableaux sémantiques permet de la montrer [14]. $\dashv$

Proposition 3 *La logique normale $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ est correcte et complète pour la classe des cadres $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$ tels que $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \exists t (xS_i y \& yRz \Rightarrow xRt \& tS_i z)$.*

Preuve Nous laissons au lecteur le soin de montrer la correction de $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ pour la classe des cadres $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$ tels que $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \exists t (xS_i y \& yRz \Rightarrow xRt \& tS_i z)$.
Quant à la complétude, l'argument habituel basé sur le modèle canonique de $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ permet de la montrer [4]. Dans cet argument, il faut montrer que si x, y et z sont des $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$-théories maximales telles que $\Box_i x \subseteq y$ et $\mathcal{O}y \subseteq z$ alors il existe une $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$-théorie maximale t telle que $\mathcal{O}x \subseteq t$ et $\Box_i t \subseteq z$. Supposons $\Box_i x \subseteq y$ et $\mathcal{O}y \subseteq z$. Soit $t_0 = \mathcal{O}x \cup \Box_i z$. Si t_0 est une $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$-théorie consistante alors, d'après le lemme de Lindenbaum, il existe une $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$-théorie maximale t telle que $t_0 \subseteq t$. Qui plus est, le lecteur n'aura aucun mal à le montrer, $\mathcal{O}x \subseteq t$ et $\Box_i t \subseteq z$. Il suffit donc de montrer que t_0 est une $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$-théorie consistante. Si t_0 est inconsistante alors il existe une formule ϕ telle que $\mathcal{O}\phi \in x$ et $\Box_i \neg\phi \in z$. Puisque $\mathcal{O}\phi \in x$, alors $\mathcal{O}\Box_i \Diamond_i \phi \in x$. Par conséquent, $\Box_i \mathcal{O}\Box_i \Diamond_i \phi \in x$. Puisque $\Box_i x \subseteq y$, alors $\mathcal{O}\Box_i \Diamond_i \phi \in y$. Puisque $\mathcal{O}y \subseteq z$, alors $\Box_i \Diamond_i \phi \in z$. Donc $\Diamond_i \phi \in z$, ce qui contredit $\Box_i \neg\phi \in z$. $\dashv$

Proposition 4 *Si $Card(AG) = 1$ alors la logique normale $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ est PSPACE-complète sinon la logique normale $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ est coNEXPTIME-complète.*

Preuve Si $Card(AG) = 1$ alors la logique normale $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ est PSPACE-difficile parce qu'elle est une extension conservatrice de la restriction de la logique normale $\mathcal{L}(\emptyset)$ au langage défini par les opérateurs déontiques seulement.
Quant à l'appartenance à PSPACE, l'argument habituel basé sur les tableaux sémantiques permet de la montrer [14].
Sinon la logique normale $\mathcal{L}(\{(O\Box_i)\})$ est coNEXPTIME-difficile parce que l'argument développé par Gasquet [14] pour montrer que la logique normale $K^2_{\Box c}$ est coNEXPTIME-difficile s'adapte plutôt bien.
Quant à l'appartenance à coNEXPTIME, l'argument habituel basé sur les tableaux sémantiques permet de la montrer [14]. $\dashv$

Proposition 5 *La logique normale $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$ est correcte et complète pour la classe des cadres $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$ tels que $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \exists t (xS_i y \& yRz \Rightarrow xRt \& (Card(S_i(z)) \geq 2 \Rightarrow tS_i z))$.*

Preuve Nous laissons au lecteur le soin de montrer la correction de $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$ pour la classe des cadres $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$ tels que $\mathcal{F} \models \forall x \forall y \forall z \exists t (xS_i y \& yRz \Rightarrow xRt \& (Card(S_i(z)) \geq 2 \Rightarrow tS_i z))$.
Quant à la complétude, l'argument habituel basé sur le modèle canonique de $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$ permet de la montrer [4]. Dans cet argument, il faut montrer que si x, y et z sont des $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$-théories maximales telles que $\Box_i x \subseteq y$ et $\mathcal{O}y \subseteq z$ alors il existe une $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$-théorie maximale t telle que $\mathcal{O}x \subseteq t$ et si $Card(S_i(z)) \geq 2$ alors $\Box_i t \subseteq z$. Supposons $\Box_i x \subseteq y$ et $\mathcal{O}y \subseteq z$. Si $Card(S_i(z)) < 2$ alors soit $t_0 = \mathcal{O}x$. Le lecteur n'aura aucun mal à le montrer, t_0 est une $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$-théorie consistante. Par conséquent, d'après le lemme de Lindenbaum, il existe une $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$-théorie maximale t telle que $t_0 \subseteq t$. Qui plus est, le lecteur n'aura aucun mal à le montrer, $\mathcal{O}x \subseteq t$. Si $Card(S_i(z)) \geq 2$ alors soit $t_0 = \mathcal{O}x \cup \Box_i z$. Si t_0 est une $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$-théorie consistante alors, d'après le lemme de Lindenbaum, il existe une $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$-théorie maximale t telle que $t_0 \subseteq t$. Qui plus est, le lecteur n'aura aucun mal à le montrer, $\mathcal{O}x \subseteq t$ et $\Box_i t \subseteq z$. Il suffit donc de montrer que t_0 est une $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$-théorie consistante. Si t_0 est inconsistante alors il existe une formule ϕ telle que $\mathcal{O}\phi \in x$ et $\Box_i \neg\phi \in z$. Puisque $Card(S_i(z)) \geq 2$, alors il existe

une formule ψ telle que $\Diamond_i\psi \in z$ et $\Diamond_i\neg\psi \in z$. Puisque $\mathcal{O}\phi \in x$, alors $\mathcal{O}(\Box_i(\psi \vee \Diamond_i\phi) \vee \Box_i\neg(\psi \vee \Diamond_i\phi)) \in x$. Par conséquent, $\Box_i\mathcal{O}(\Box_i(\psi \vee \Diamond_i\phi) \vee \Box_i\neg(\psi \vee \Diamond_i\phi)) \in x$. Puisque $\Box_i x \subseteq y$, alors $\mathcal{O}(\Box_i(\psi \vee \Diamond_i\phi) \vee \Box_i\neg(\psi \vee \Diamond_i\phi)) \in y$. Puisque $\mathcal{O}y \subseteq z$, alors $\Box_i(\psi \vee \Diamond_i\phi) \vee \Box_i\neg(\psi \vee \Diamond_i\phi)\phi \in z$. Puisque $\Diamond_i\psi \in z$ et $\Diamond_i\neg\psi \in z$, alors $\Diamond_i\phi \in z$, ce qui contredit $\Box_i\neg\phi \in z$. $\dashv$

Proposition 6 *Si $Card(AG) = 1$ alors la logique normale $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$ est PSPACE-complète sinon la logique normale $\mathcal{L}(\{(O(\Box_i\Box_i\neg))\})$ est coNEXPTIME-complète.*

Preuve Démonstration semblable à celle de la proposition 4. $\dashv$

8 Savoir que versus savoir si

Considérons un agent $i \in AG$ fortement introspectif.

8.1 Le droit que

Nous l'avons vu dans la section 4, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F} \models \mathcal{O}p \rightarrow \Box_i\mathcal{O}p$,
- $\mathcal{F} \models \mathcal{I}p \rightarrow \Box_i\mathcal{I}p$,
- $\mathcal{F} \models \mathcal{P}p \rightarrow \Box_i\mathcal{P}p$ et
- $\mathcal{F} \models \mathcal{F}p \rightarrow \Box_i\mathcal{F}p$.

Autrement dit, dans tout cadre de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, i sait ce qui est obligatoire si et seulement si il sait ce qui est interdit si et seulement si il sait ce qui est permis si et seulement si il sait ce qui est facultatif.

8.2 Le droit de savoir que

Egalement, nous l'avons vu dans la section 5, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F} \models \mathcal{O}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{O}\Box_i p$,
- $\mathcal{F} \models \mathcal{I}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{I}\Box_i p$,
- $\mathcal{F} \models \mathcal{P}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{P}\Box_i p$ et
- $\mathcal{F} \models \mathcal{F}\Box_i p \rightarrow \Box_i\mathcal{F}\Box_i p$.

Autrement dit, dans tout cadre de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, i sait ce qui est obligatoire d'être su que si et seulement si il sait ce qui est interdit d'être su que si et seulement si il sait ce qui est permis d'être su que si et seulement si il sait ce qui est facultatif d'être su que.

8.3 Le droit de savoir si

Enfin, nous l'avons vu dans la section 6, pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F} \models \mathcal{O}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{O}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ et
- $\mathcal{F} \models \mathcal{F}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{F}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$

et pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F} \models \mathcal{I}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{I}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ et
- $\mathcal{F} \models \mathcal{P}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{P}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$.

Autrement dit, dans tout cadre de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$, i sait ce qui est obligatoire d'être su si si et seulement si il sait ce qui est facultatif d'être su si et i sait ce qui est interdit d'être su si si et seulement si il sait ce qui est permis d'être su si. Toutefois, les conditions suivantes ne sont pas équivalentes pour tout cadre $\mathcal{F} = (W, R, S)$ de $\mathcal{C}(D, T, 4, 5)$:

- $\mathcal{F} \models \mathcal{O}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{O}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ et $\mathcal{F} \models \mathcal{F}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{F}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ et
- $\mathcal{F} \models \mathcal{I}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{I}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$ et $\mathcal{F} \models \mathcal{P}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p) \rightarrow \Box_i\mathcal{P}(\Box_i p \vee \Box_i\neg p)$.

Autrement dit, il existe des cas où i sait ce qui est obligatoire d'être su si et ce qui est facultatif d'être su si sans savoir ce qui est interdit d'être su si et ce qui est permis d'être su si et il existe des cas où i sait ce qui est interdit d'être su si et ce qui est permis d'être su si sans savoir ce qui est obligatoire d'être su si et ce qui est facultatif d'être su si.

8.4 Aparté sur le raisonnement épistémique

L'enregistrement de ces faits nous engage à les mettre en parallèle avec ceux établis par Fagin, Halpern, Moses et Vardi [13] dans le cadre du raisonnement épistémique. Fagin, Halpern, Moses et Vardi construisent la syntaxe d'un langage dans lequel l'écriture de formules disant que "il sera toujours le cas que . . ." et "il est su par l'agent i que . . ." est possible en faisant usage des opérateurs G et $\Box_i$. Ils considèrent la formule suivante qui caractérise la façon dont les connaissances d'un agent i qui "n'apprend rien" évoluent au cours du temps :

(nl_i) $G\Box_i p \rightarrow \Box_i Gp$ ("tout ce qui sera toujours su par l'agent i que, l'agent i sait que cela sera toujours le cas").

Puisque l'agent i est fortement introspectif, alors considérer la formule (nl_i) revient à considérer la formule suivante :

$(G\Box_i)$ $G\Box_i p \rightarrow \Box_i G\Box_i p$ ("tout ce qui sera toujours su par l'agent i que, l'agent i sait que cela le sera toujours") que Fagin, Halpern, Moses et Vardi ne considèrent pas. S'il nous faut mettre la formule $(G\Box_i)$ en rapport avec la formule $(O\Box_i)$ alors la formule suivante, que Fagin, Halpern, Moses et Vardi ne considèrent pas, doit être mise en rapport avec la formule $(O(\Box_i\Box_i\neg))$:

$(G(\Box_i\Box_i\neg))$ $G(\Box_i p \vee \Box_i \neg p) \rightarrow \Box_i G(\Box_i p \vee \Box_i \neg p)$ ("tout ce qui sera toujours su par l'agent i si, l'agent i sait que cela le sera toujours").

Puisque l'agent i est fortement introspectif, alors accepter la formule $(G\Box_i)$ implique d'accepter la formule $(G(\Box_i\Box_i\neg))$. L'inverse n'est pas vrai : il existe des cas où i sait ce qui sera toujours su si sans savoir ce qui sera toujours su que. L'étude des propriétés des théories logiques qu'on obtient en remplaçant (nl_i) par $(G(\Box_i\Box_i\neg))$ dans les travaux de Fagin, Halpern, Moses et Vardi est encore à faire.

9 Conclusion

Dans un article aussi court, il ne nous a pas été possible d'inclure entièrement les démonstrations des résultats des propositions que nous avons énoncées. Il ne nous a pas non plus été possible de parler des prolongements que ces résultats appellent :

Droit de savoir et temps Avec la confidentialité et l'intégrité, la disponibilité figure parmi les propriétés qu'une politique de sécurité doit assurer. Une donnée est disponible lorsque son accès est garanti avant un certain délai à tout utilisateur qui en fait la demande à un moment où cet accès lui est permis. Un prolongement possible de nos résultats concerne, à la manière de Broersen, Dignum, Dignum et Meyer [6], l'intégration d'opérateurs de la logique temporelle à notre langage. Dans le langage étendu, comment définirons-nous le fait qu'il est obligatoire, interdit, permis ou facultatif de savoir avant un certain délai qu'une chose est vraie ?

Droit de savoir et actions Traditionnellement, les lois disent quels états sont obligatoires, interdits, permis ou facultatifs. Dans certains cas, elles précisent aussi quelles actions sont obligatoires, interdites, permises ou facultatives. Un prolongement possible de nos résultats concerne, à la manière de Balbiani [1], l'intégration d'opérateurs de la logique dynamique à notre langage. Dans le langage étendu, comment définirons-nous le fait qu'un action est obligatoire, interdite, permise ou facultative ?

Droit de savoir et annonces publiques Dans certains cas, les actions dont nous venons de parler consistent à effectuer des annonces publiques. Le caractère obligatoire, interdit, permis ou facultatif de ces annonces publiques dépend alors beaucoup de ce qu'apprennent sur les données les utilisateurs qui les écoutent. Un prolongement possible de nos résultats concerne, à la manière de van Ditmarsch, van der Hoek et Kooi [12], l'intégration d'opérateurs de la logique des annonces publiques à notre langage. Dans le langage étendu, comment définirons-nous le fait qu'il est obligatoire, interdit, permis ou facultatif d'annoncer publiquement une chose ?

Remerciements

Nous tenons à remercier les collègues de l'institut de recherche en informatique de Toulouse qui, par les discussions que nous avons eues avec eux, ont contribué à la maturation du travail que nous présentons aujourd'hui. En particulier, nous tenons à remercier Fahima Cheikh, Robert Demolombe et Andreas Herzig pour leur aide précieuse.

Références

1. Balbiani, P. : *Logical approaches to deontic reasoning: from basic questions to dynamic solutions.* International Journal of Intelligent Systems (à paraître).

2. Bieber, P., Cuppens, F. : *A definition of secure dependencies using the logic of security.* In : *Computer Security Foundations Workshop IV.* IEEE (1991).

3. Bishop, M. : *Computer Security.* Addison-Wesley (2003).

4. Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. : *Modal Logic.* Cambridge University Press (2001).

5. Bonatti, P., Kraus, S., Subrahmanian, V. : *Foundations of secure deductive databases.* IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering **7** (1995).

6. Broersen, J., Dignum, F., Dignum, V., Meyer, J.-J. : *Designing a deontic logic of deadlines.* In : *Deontic Logic in Computer Science.* Springer (2004).

7. Chagrov, A., Zakharyaschev, M. : *Modal Logic.* Oxford University Press (1997).

8. Chang, C., Keisler, H. : *Model Theory.* Elsevier Science (1990).

9. Cuppens, F., Demolombe, R. : *A deontic logic for reasoning about confidentiality.* In : *Deontic Logic, Agency and Normative Systems.* Springer (1996).

10. Cuppens, F., Demolombe, R. : *A modal logical framework for security policies.* In : *Foundations of Intelligent Systems.* Springer (1997).

11. Demolombe, R., Louis, V. : *Speech acts with institutional effects in agent societies.* In : *Deontic Logic and Artificial Normative Systems.* Springer (2006).

12. van Ditmarsch, H., van der Hoek, W., Kooi, B. : *Dynamic Epistemic Logic.* Springer (2007).

13. Fagin, R., Halpern, J., Moses, Y., Vardi, M. : *Reasoning About Knowledge.* MIT Press (1995).

14. Gasquet, O. : *On the influence of confluence in modal logics.* Fundamenta Informaticæ**70** (2006).

15. Glasgow, J., MacEwen, G., Panangaden, P. : *A logic for reasoning about security.* ACM Transactions on Computer Systems **10** (1992).

16. Grossi, D., Dignum, F., Royakkers, L., Meyer, J.-J. : *Collective obligations and agents: who gets the blame?* In : *Deontic Logic in Computer Science.* Springer (2004).

17. Papadimitriou, C.: *Computational Complexity.* Addison-Wesley (1994).

18. Stockmeyer, L. : *The polynomial-time hierarchy.* Theoretical Computer Science **3** (1977).